Διάλεξη 6η.

14/03/2018.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Θεώρημα 1: Έστω $X_1,\dots,X_n$ τ.δ. από πληθ. (μ,σ^2)

i) $E(\bar{X})=\mu$. ii) $Var(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}$. iii) $E(S^2)=\sigma^2$.

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_1^n X_i$$

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_1^n (X_i-\bar{X})^2=\frac{1}{n-1}\left[\sum_1^n (X_i-\mu)^2-n(\bar{X}-\mu)^2\right]$$

Πόρισμα: Αν $X_{11},X_{12},\dots,X_{1n_1}$, από πληθ 1 (μ_1,σ_1^2)

και $X_{21},X_{22},X_{23},\dots,X_{2n_2}$ από ανεξ. πληθ. 2 (μ_2,σ_2^2)

i) $E(\bar{X}_1-\bar{X}_2)=\mu_1-\mu_2$, ii) $Var(\bar{X}_1-\bar{X}_2)=\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}$

Θεώρημα 2: Έστω $X_1,\dots,X_n$ τ.δ. από $N(\mu,\sigma^2)$. Τότε:

i) $\bar{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$

ii) $\bar{X}$ και S^2 ανεξ τ.μ.

iii) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim X^2_{n-1}$

~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~

$Y=\sum_1^n a_i X_i$, $E(Y)=\sum_1^n a_i E(X_i)$, $Var(Y)=\sum_1^n a_i Var(X_i)$

$$X_v^2=\sum_1^v N^2(0,1)\equiv G\left(a=\frac{v}{2},\ \beta=2\right)$$

$$m_G(t)=(1-\beta t)^{-a}$$

$t_v=\frac{N(0,1)}{\sqrt{X_v^2/v}}$, $F_{v_1,v_2}=\frac{\frac{X_{v_1}^2}{v_1}}{\frac{X_{v_2}^2}{v_2}}$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)\frac{1}{(n-1)}\sum_1^n (x_i-\bar{x})^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_1^n (x_i-\bar{x})^2}{\sigma^2}.$$

$$\underbrace{\frac{\sum_1^n (x_i-\bar{x})^2}{\sigma^2}}_{Y} = \underbrace{\frac{\sum_1^n (x_i-\mu)^2}{\sigma^2}}_{\omega} - \underbrace{\frac{n(\bar{x}-\mu)^2}{\sigma^2}}_{Z}.$$

$$Y = ;$$

$$X \sim N(\mu,\sigma^2) \rightarrow \frac{x_i-\mu}{\sigma} \sim N(0,1) \rightarrow \sum_1^n \left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi_n^2$$

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \rightarrow \overbrace{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)}^{\text{τυπική κανονική}} \rightarrow \overbrace{\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2}^{\text{τυπική κανονική στο τετράγωνο}} \sim \chi_1^2.$$

↓ είναι μια χ^2 μ' ένα βαθμό ελευθερίας.

Άρα $\underline{\underline{\omega \sim \chi_n^2}}$ και $\underline{\underline{Z \sim \chi_1^2}}$.

$\omega = Y + Z$ και Y, Z ανεξ. τ.μ.

$$Y = \omega - Z \rightarrow m_\omega(t) = m_Y(t)\, m_Z(t) \rightarrow (1-2t)^{-\frac{n}{2}} = m_Y(t)(1-2t)^{-1/2}.$$

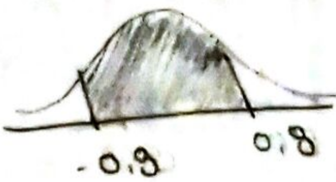
$$\rightarrow m_Y(t) = \frac{(1-2t)^{-n/2}}{(1-2t)^{-1/2}} = (1-2t)^{-\frac{n-1}{2}}.$$

δηλ. $\boxed{Y \sim \chi_{n-1}^2}$

Παράδειγμα 3.1.

$n=25$, $N(\mu, \sigma^2=625)$ / $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n} = \frac{625}{25} = 25 = \sigma^2_{\bar{x}}\right)$

i) $P(|\bar{X}-\mu| \geq 4) = 1 - P(|\bar{X}-\mu| \leq 4) = 1 - P(-4 \leq \bar{X}-\mu \leq 4) =$



$= 1 - P\left(-\frac{4}{5} \leq \underbrace{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{x}}}}_{Z \sim N(0,1)} \leq \frac{4}{5}\right)$

$= 1 - P(-0.8 \leq Z \leq 0.8)$

$= 1 - 2P(0 \leq Z \leq 0.8)$

$= 1 - 2 \times \underbrace{0,2881}_{\text{(από πίνακα που έχει δοθεί)}} = 0,4238.$

ii) $P(S^2 \geq 323) = P\left(\overbrace{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}^{\chi^2_{n-1}} \geq \frac{24 \times 323}{625}\right) = P(\chi^2_{24} \geq \underbrace{12.40}_{\chi^2_{0.975,24}}) = 0,975$

Θεώρημα 3: Έστω $X_1, \ldots, X_n$ τ.δ. από $N(\mu, \sigma^2)$. Τότε $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$.

Απόδ.

Άρα $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n) \Rightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ και $\bar{X}, S^2$ ανεξ. τ.μ.

$$\Rightarrow \frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\cancel{\sigma}/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{\frac{\cancel{(n-1)}S^2}{\cancel{\sigma^2}}}{\cancel{(n-1)}}}} = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$$

και $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$.

Πόρισμα: Έστω $(\bar{x}_1, S_1^2)$ και $(\bar{x}_2, S_2^2)$ μέσες τιμές και διακυμάνσεις δύο τυχαίων δειγμάτων, μεγέθους n_1 κ' n_2 αντίστοιχα από ανεξ. κανονικούς πληθυσμούς με μέσες τιμές μ_1 και μ_2 αντίστοιχα και διακύμανση σ^2, δηλαδή:

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2 : \left(N_1(\mu_1, \sigma^2),\ N_2(\mu_2, \sigma^2)\right)$$

Τότε:

$$\boxed{\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}.}$$

και

$$\boxed{S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}.}$$

Απόδ.

$$\bar{x}_1 \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma^2}{n_1}\right), \quad \bar{x}_2 \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma^2}{n_2}\right)$$

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \sim N\left[\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2} = \sigma\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\right]$$

και

$$\frac{\dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}}{\sqrt{\dfrac{\dfrac{\cancel{(n_1+n_2-2)}S_p^2}{\sigma^2}}{\cancel{(n_1+n_2-2)}}}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \ N$$

$$\sim \left(\chi^2_{n_1+n_2-2} / n_1+n_2-2\right)$$

Θεώρημα 4: Έστω S_1^2 και S_2^2 οι διακυμάνσεις 2 τυχαίων δειγμάτων από 2 πληθ. $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ και $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ μεγέθων n_1 και n_2 αντίστοιχα

Τότε: $$\boxed{\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F_{n_1-1,n_2-1}}$$

Απόδ.

$$\left.\begin{aligned} \frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2} &\sim X^2_{n_1-1} \\ \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2} &\sim X^2_{n_2-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\frac{(\cancel{n_1-1})S_1^2}{\sigma_1^2}\Big/(\cancel{n_1-1})}{\frac{(\cancel{n_2-1})S_2^2}{\sigma_2^2}\Big/(\cancel{n_2-1})} \sim F_{n_1-1,n_2-1}$$

o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (ΚΟΘ)

ΚΟΘ (1): Έστω $X_1,\dots,X_n$ n ανεξάρτητες ισόνομες τ.μ. (ενός τυχαίου δείγματος), η καθε μια με πεπερασμένη μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2.
Τότε για μεγάλο n: $(n \geq 30)$, η τ.μ.

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\cdot\sqrt{n}} \overset{\text{κατά}}{\underset{\text{προσέγγιση}}{\sim}} N(0,1) \text{ ή ισοδύναμα:}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{\text{κατά}}{\underset{\text{προσέγγιση}}{\sim}} N(n\cdot\mu, n\cdot\sigma^2)}$$

ΚΟΘ(2): Έστω $X_1, \dots, X_n$ τ.δ. από πληθυσμό με πεπερασμένη μέση τιμή και διακύμανση σ^2.
Αν το n είναι μεγάλο τότε και η δειγματική μέση τιμή $\boxed{\bar{X} \underset{\text{προσεγγ.}}{\overset{\text{κατά}}{\sim}} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) n}$

και $\boxed{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \underset{\text{προσέγγιση}}{\overset{\text{κατά}}{\sim}} N(0,1)}$

$n(0,10)$
$\bar{X}, n=5$